Ejercicio 1.19.

Dadas las familias $(A_\lambda)_{\lambda\in L}$ y $(B_\mu)_{\mu\in M}$, forme dos familias con índices en $L\times M$ considerando los conjuntos

$$(A_\lambda\cup B_\mu)_{(\lambda,\mu)\in L\times M} \quad \text{y } (A_\lambda\cap B_\mu)_{(\lambda,\mu)\in L\times M}.$$

Pruebe que se tiene

$$\left(\bigcup_{\lambda\in L} A_\lambda\right)\cap\left(\bigcup_{\mu\in M} B_\mu\right)=\bigcup_{(\lambda,\mu)\in L\times M}(A_\lambda\cap B_\mu),$$
$$\left(\bigcap_{\lambda\in L} A_\lambda\right)\cup\left(\bigcap_{\mu\in M} B_\mu\right)=\bigcap_{(\lambda,\mu)\in L\times M}(A_\lambda\cup B_\mu).$$

Demostración.

1. Demostraremos que

$$\left(\bigcup_{\lambda\in L} A_\lambda\right)\cap\left(\bigcup_{\mu\in M} B_\mu\right)=\bigcup_{(\lambda,\mu)\in L\times M}(A_\lambda\cap B_\mu).$$

Considere un elemento arbitrario $x\in\left(\bigcup_{\lambda\in L} A_\lambda\right)\cap\left(\bigcup_{\mu\in M} B_\mu\right)$. Por definición de intersección de dos conjuntos se tiene que

$$x\in\bigcup_{\lambda\in L} A_\lambda \quad \text{y} \quad x\in\bigcup_{\mu\in M} B_\mu.$$

Por definición de unión de una familia de conjuntos, de lo anterior se obtiene que

$$x\in A_\lambda \quad \text{y} \quad x\in B_\mu, \quad \text{para ciertos } \lambda\in L \text{ y } \mu\in M.$$

Esto es lo mismo que decir,

$$x\in A_\lambda\cap B_\mu, \quad \text{para cierto } (\lambda,\mu)\in L\times M.$$

Por definición de unión de una familia de conjuntos, lo anterior implica que

$$x\in\bigcup_{(\lambda,\mu)\in L\times M}(A_\lambda\cap B_\mu).$$

Por tanto, siendo x arbitrario, hemos demostrado que

$$\left(\bigcup_{\lambda\in L} A_\lambda\right)\cap\left(\bigcup_{\mu\in M} B_\mu\right)\subset\bigcup_{(\lambda,\mu)\in L\times M}(A_\lambda\cap B_\mu).$$

Recíprocamente, ahora considere un elemento arbitrario x en $\bigcup_{(\lambda,\mu)\in L\times M}(A_\lambda\cap B_\mu)$. Por definición de unión de una familia de conjuntos, esto implica que

$$x\in A_\lambda\cap B_\mu, \quad \text{para cierto } (\lambda,\mu)\in L\times M,$$

lo cual equivale a decir que

$$x \in A_\lambda \quad \text{y} \quad x \in B_\mu, \quad \text{para ciertos } \lambda \in L \text{ y } \mu \in M.$$

Por definición de unión de una familia de conjuntos, esto implica que

$$x \in \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda \quad \text{y} \quad x \in \bigcup_{\mu \in M} B_\mu,$$

y por definición de intersección de dos conjuntos esto último nos dice que

$$x \in \left(\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda\right) \cap \left(\bigcup_{\mu \in M} B_\mu\right).$$

Habiendo sido x arbitrario en $\bigcup_{(\lambda,\mu)\in L\times M} (A_\lambda \cap B_\mu)$, se concluye que

$$\bigcup_{(\lambda,\mu)\in L\times M} (A_\lambda \cap B_\mu) \subset \left(\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda\right) \cap \left(\bigcup_{\mu \in M} B_\mu\right).$$

2. Demostraremos que

$$\left(\bigcap_{\lambda \in L} A_\lambda\right) \cup \left(\bigcap_{\mu \in M} B_\mu\right) = \bigcap_{(\lambda,\mu)\in L\times M} (A_\lambda \cup B_\mu).$$

Iniciamos considerando un elemento arbitrario $x \in \left(\bigcap_{\lambda \in L} A_\lambda\right) \cup \left(\bigcap_{\mu \in M} B_\mu\right)$. Por definición de unión de dos conjuntos se tiene que

$$x \in \bigcap_{\lambda \in L} A_\lambda \quad \text{o} \quad x \in \bigcap_{\mu \in M} B_\mu.$$

De aquí, y de la definición de intersección de una familia de conjuntos, resulta que

$$x \in A_\lambda, \text{ para todo } \lambda \in L, \quad \text{o} \quad x \in B_\mu, \text{ para todo } \mu \in M.$$

Esto es lo mismo que decir,

$$x \in A_\lambda \cup B_\mu, \quad \text{para todo } (\lambda,\mu) \in L \times M.$$

Por definición de intersección de una familia de conjuntos, lo anterior implica que

$$x \in \bigcap_{(\lambda,\mu)\in L\times M} (A_\lambda \cup B_\mu).$$

Como x fue un elemento arbitrario, podemos concluir que

$$\left(\bigcap_{\lambda \in L} A_\lambda\right) \cup \left(\bigcap_{\mu \in M} B_\mu\right) \subset \bigcap_{(\lambda,\mu)\in L\times M} (A_\lambda \cup B_\mu).$$

Para demostrar la inclusión recíproca, ahora considere un elemento arbitrario x en el conjunto $\bigcap_{(\lambda,\mu)\in L\times M} (A_\lambda \cup B_\mu)$. Por definición de intersección de una familia de conjuntos, esto implica que

$$x \in A_\lambda \cup B_\mu, \quad \text{para todo } (\lambda,\mu) \in L \times M,$$

lo cual implica que

$$x \in A_\lambda, \text{ para todo } \lambda \in L \quad \text{o} \quad x \in B_\mu, \text{ para todo } \mu \in M.$$

Por definición de intersección de una familia de conjuntos, esto nos dice que

$$x \in \bigcap_{\lambda \in L} A_\lambda \quad \text{o} \quad x \in \bigcap_{\mu \in M} B_\mu,$$

y por definición de unión de dos conjuntos esto último equivale a decir que

$$x \in \left(\bigcap_{\lambda \in L} A_\lambda \right) \cup \left(\bigcap_{\mu \in M} B_\mu \right).$$

Como x fue arbitrario en $\bigcap_{(\lambda,\mu) \in L \times M} (A_\lambda \cap B_\mu)$, se concluye que

$$\bigcap_{(\lambda,\mu) \in L \times M} (A_\lambda \cup B_\mu) \subset \left(\bigcap_{\lambda \in L} A_\lambda \right) \cup \left(\bigcap_{\mu \in M} B_\mu \right).$$

∎