Ejercicio 1.18.

Sea $f:\mathscr{P}(A)\to\mathscr{P}(A)$ una función tal que

a) $X\subset Y\Rightarrow f(Y)\subset f(X)$, b) $f(f(X))=X$.

Pruebe que

1) $f\left(\bigcup_{\lambda\in L}X_\lambda\right)=\bigcap_{\lambda\in L}f(X_\lambda)$; 2) $f\left(\bigcap_{\lambda\in L}X_\lambda\right)=\bigcup_{\lambda\in L}f(X_\lambda)$.

Aquí X, Y y cada X_λ son subconjuntos de A.

Demostración.

1. Como $X_\lambda\subset\bigcup_{\lambda\in L}X_\lambda$, para todo $\lambda\in L$, entonces de la hipótesis (a) se tiene la relación $f\left(\bigcup_{\lambda\in L}X_\lambda\right)\subset f(X_\lambda)$, para todo $\lambda\in L$, es decir, el conjunto $f\left(\bigcup_{\lambda\in L}X_\lambda\right)$ es subconjunto de *todos* los conjuntos $f(X_\lambda)$, por tanto, $f\left(\bigcup_{\lambda\in L}X_\lambda\right)\subset\bigcap_{\lambda\in L}f(X_\lambda)$.

   Por otro lado, sabemos que $\bigcap_{\lambda\in L}f(X_\lambda)\subset f(X_\lambda)$, para todo $\lambda\in L$, entonces por el ítem (a) esto implica que $f(f(X_\lambda))\subset f\left(\bigcap_{\lambda\in L}f(X_\lambda)\right)$, para todo $\lambda\in L$. A su vez, de esto último y del ítem (b) se deduce que $X_\lambda\subset f\left(\bigcap_{\lambda\in L}f(X_\lambda)\right)$, para todo $\lambda\in L$. Esto está diciendo que *cada conjunto* X_λ está contenido en el conjunto $f\left(\bigcap_{\lambda\in L}f(X_\lambda)\right)$, entonces de aquí resulta que $\bigcup_{\lambda\in L}X_\lambda\subset f\left(\bigcap_{\lambda\in L}f(X_\lambda)\right)$. Esto implica, nuevamente por el ítem (a), que $f\left(f\left(\bigcap_{\lambda\in L}f(X_\lambda)\right)\right)\subset f\left(\bigcup_{\lambda\in L}X_\lambda\right)$. De esto, y haciendo uso nuevamente el ítem (b), se concluye que $\bigcap_{\lambda\in L}f(X_\lambda)\subset f\left(\bigcup_{\lambda\in L}X_\lambda\right)$.

   Habiendo demostrado las inclusiones

   $$f\left(\bigcup_{\lambda\in L}X_\lambda\right)\subset\bigcap_{\lambda\in L}f(X_\lambda)\qquad\text{y}\qquad\bigcap_{\lambda\in L}f(X_\lambda)\subset f\left(\bigcup_{\lambda\in L}X_\lambda\right)$$

   se concluye en la igualdad enunciada.

2. Como $\bigcap_{\lambda\in L}X_\lambda\subseteq X_\lambda$, para todo $\lambda\in L$, entonces de la hipótesis (a) se tiene la relación $f(X_\lambda)\subset f\left(\bigcap_{\lambda\in L}X_\lambda\right)$, para todo $\lambda\in L$. Esto está diciendo que *cada conjunto* $f(X_\lambda)$ está contenido en $f\left(\bigcap_{\lambda\in L}X_\lambda\right)$, entonces $\bigcup_{\lambda\in L}f(X_\lambda)\subset f\left(\bigcap_{\lambda\in L}X_\lambda\right)$.

   Por otro lado, como para $\lambda\in L$ se cumple que $f(X_\lambda)\subset\bigcup_{\lambda\in L}f(X_\lambda)$ entonces por el item (a) se concuye que $f\left(\bigcup_{\lambda\in L}f(X_\lambda)\right)\subset f(f(X_\lambda))=X_\lambda$, donde la última igualdad se obtene por el ítem (b). Como es válido para todo $\lambda \in L$ entonces $f\left(\bigcup_{\lambda \in L} f(X_\lambda)\right) \subset \bigcap_{\lambda \in L} X_\lambda$. Luego, usando nuevamente los ítem (a) y (b), resulta

$$f\left(\bigcap_{\lambda \in L} X_\lambda\right) \subset f\left(f\left(\bigcup_{\lambda \in L} f(X_\lambda)\right)\right) = \bigcup_{\lambda \in L} f(X_\lambda).$$

De esto y de la inclusión probada en la primera parte de este ítem se concluye en la igualdad mencionada.

∎